Grado en Matemáticas – Ejercicios de Análisis Funcional
Espacios de Hilbert

1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Prueba que:

   a) Si $x, y \in \mathcal{H}$ son tales que $\|x\| = \|y\| = \left\|\dfrac{x+y}{2}\right\|$, entonces $x = y$. En particular, la esfera unidad de $\mathcal{H}$ no contiene segmentos no triviales.

   b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos $x, y \in B_{\mathcal{H}}$ con $\|x - y\| > \varepsilon$ se verifica que $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta$.

2. Prueba que en un espacio de Hilbert de dimensión infinita una base ortonormal nunca es una base algebraica.

3. Da una demostración directa del teorema de Riesz-Frèchet para el caso de un espacio de Hilbert separable.

4. En el espacio vectorial $X = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty\right\}$ se considera el producto escalar definido para todo $x, y \in X$ por

$$\langle x | y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)\overline{y(n)}}{n}$$

   Prueba que la norma definida en X por dicho producto escalar no es completa. Estudia si dicha norma es completa en el espacio $Y = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{|x(n)|^2}{n} < \infty\right\}$.

   Sugerencia. Considera la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\, \mathrm{e}_k$ donde los e_k son los vectores unidad.

5. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $a \in \mathcal{H}$, $a \neq 0$. Prueba que $\operatorname{dist}(x, \{a\}^{\perp}) = \dfrac{|(x|a)|}{\|a\|}$.

6. Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $z \in \mathcal{H}$. Prueba que

$$\text{mín}\,\{\|z - x\| : x \in M\} = \text{máx}\,\left\{|(z|y)| : y \in M^{\perp},\ \|y\| = 1\right\}$$

   Sugerencia. Sea $z = u + v$ con $u \in M$, $v \in M^{\perp}$. Se tiene $\|v\| = \|z - u\| = \text{mín}\,\{\|z - x\| : x \in M\}$. Prueba que $\|v\| = \text{máx}\,\left\{|(z|y)| : y \in M^{\perp},\ \|y\| = 1\right\}$.

7. a) Calcular el mínimo valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left|x^3 - a - bx - cx^2\right|^2 \,\mathrm{d}x$ cuando $a, b, c \in \mathbb{C}$.

   b) Calcula el máximo de $\displaystyle\left|\int_{-1}^{1} t^3 g(t)\,\mathrm{d}t\right|$ donde g cumple las condiciones

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} g(t)t\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} g(t)t^2\,\mathrm{d}t = 0, \quad \int_{-1}^{1} |g(t)|^2\,\mathrm{d}t = 1$$

8. Se considera el espacio prehilbertiano $(c_{00}, \|\ \|_2)$. Sea $M = \left\{x \in c_{00} : \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{n} = 0\right\}$. Prueba que M es un subespacio cerrado de c_{00} y calcula $M^{\perp}$.¿Es cierto el teorema de Riesz-Fisher en c_{00}?

9. Prueba que $M = \left\{x \in \ell_2 : \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{\sqrt{n}} = 0\right\}$ no es un subespacio cerrado de ℓ_2.

10. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert tales que $M \perp N$. Prueba que el subespacio $M + N$ es cerrado.

11. Sea $M = \mathrm{Lin}(\{\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3\}) \subset \ell_2$. Describe el complemento ortogonal de M en ℓ_2 y las proyecciones ortogonales sobre M y $M^{\perp}$.

12. Sea $A = \{\mathrm{e}_{2n-1} + \mathrm{e}_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$. Describe los espacios $M = A^{\perp}$ y $M^{\perp}$ y calcula las proyecciones ortogonales sobre los mismos.

13. Sea $M = \{x \in \ell_2 : x(4n) - x(4n-2) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Calcula las proyecciones ortogonales de ℓ_2 sobre M y sobre $M^{\perp}$.

14. Sea $M = \{x \in \ell_2 : x(1) - x(2) = x(2) - x(3) = 0\}$. Calcula las proyecciones ortogonales de ℓ_2 sobre M y sobre $M^{\perp}$.

15. Calcula los desarrollos de Fourier en el sistema trigonométrico de las funciones $f(t) = t$ y $f(t) = t^2$ y prueba que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$